Algebraic structure of association schemes of prime order (Algebraic Combinatorics)

AUTHOR(S):

花木, 章秀

数理解析研究所講究録 1440 巻 2005 年 28-33

Algebraic structure of association schemes of prime order

信州大学・理学部 花木 章秀 (Akihide Hanaki)
Department of Mathematical Sciences,
Faculty of Science, Shinshu University

1 はじめに

これは宇野勝博氏 (大阪教育大) との共同研究 [5] の報告である。

原始的アソシエーションスキームの分類は代数的組合せ論の大きな問題である。しかし、それは一般には難しく、最も簡単である素数位数の場合でさえ解決されていない。ここでは (可換性を仮定しない) 素数位数アソシエーションスキームは可換であることを示し、最小分解体が円分体に含まれるという仮定の下で、その代数的な構造が決定されることを紹介する。代数的な構造が決定されるとは、その指標表が求められるということで、実際、それは Schurian スキーム (可移置換群から得られるアソシエーションスキーム) と同じになることが示される。指標表が同じということはその構造定数 (intersection numbers) が同じということと同値である。「任意の可換アソシエーションスキームの最小分解体が円分体に含まれるとか ?」いうことは [2] で問題として書かれていることであり、現在でも未解決である。

なお発表では、その直前に証明に不備が見つかったためお見苦しい点があったことをお詫びする。その後、更に証明に不適当な点が見つかり、現在でも分解体に関する仮定を外すことはできていない。研究集会の報告集としてはやや問題があるかも知れないが、ここでは一部を新しい証明に置き換えて紹介する。

記号などは [7] のものを用いる。(X, G) をアソシエーションスキームとする。$g \in G$ の隣接行列を σ_g で表す。$g \in G$ の valency を n_g で表す。G の既約指標全体の集合を $\mathrm{Irr}(G)$ で表す。$\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ の重複度を m_χ で表す。$1 = \{(x,x) \mid x \in X\} \in G$ を自明な関係といい、$1_G : \mathbb{C}G \to \mathbb{C}$, $1_G(\sigma_g) = n_g$ を自明な指標という。単位元をもつ可換環 R に対して R-代数 $RG = R \otimes_{\mathbb{Z}} (\bigoplus_{g \in G} \mathbb{Z}\sigma_g)$ を G の R 上の隣接代数という。$\mathbb{C}$ 上の隣接代数 $\mathbb{C}G$ が可換であるとき (X, G) は可換であるという。

2 可換性

この節では (X,G) をアソシエーションスキームとし $|X|$ が素数 p であるものとする。(X,G) が可換であることを示すのがこの節での目標である。

τ を $\mathbb{C}$ の自己同型とする。$\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ に対して $\chi^\tau(\sigma_g) = \chi(\sigma_g)^\tau$ で χ^τ を定めれば $\chi^\tau \in \mathrm{Irr}(G)$ である。これを χ の代数共役という。

Lemma 2.1. G の自明でない既約指標はすべて代数共役である。

Proof. χ を非自明な既約指標とし、その代数共役すべての和を Φ とする。Ψ を χ と代数共役でない非自明な既約指標すべての和とする。$\Psi \neq 0$ として矛盾を導く。

まず、任意の $g \in G$ に対して $\Phi(\sigma_g)$, $\Psi(\sigma_g)$ は有理整数であることに注意する。[4, Corollary 3.5] より σ_g の固有値は標数 p で n_g しかない。よって、ある $u_g, v_g \in \mathbb{Z}$ があって

$$\Phi(\sigma_g) = \Phi(1)n_g - u_g p, \quad \Psi(\sigma_g) = \Psi(1)n_g - v_g p$$

となる。指標の直交関係 [7, Theorem 4.1.5] より

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{g\in G} \frac{1}{n_g} 1_G(\sigma_{g^*})\Phi(\sigma_g) = \sum_{g\in G} \Phi(\sigma_g) \\ &= \sum_{g\in G} (\Phi(1)n_g - u_g p) = p\left(\Phi(1) - \sum_{g\in G} u_g\right). \end{aligned}$$

であるから $\sum_{g\in G} u_g = \Phi(1)$ となる。同様に $\sum_{g\in G} v_g = \Psi(1)$ である。再び直交関係から

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{g\in G} \frac{1}{n_g}\Phi(\sigma_{g^*})\Psi(\sigma_g) = \sum_{g\in G} \frac{1}{n_g}(\Phi(1)n_{g^*} - u_{g^*}p)(\Psi(1)n_g - v_g p) \\ &= \sum_{g\in G} \Phi(1)\Psi(1)n_g - \sum_{g\in G}\Phi(1)v_g p - \sum_{g\in G}\Psi(1)u_{g^*}p + \sum_{g\in G}\frac{1}{n_g}u_{g^*}v_g p^2 \\ &= p\Phi(1)\Psi(1) - p\Phi(1)\Psi(1) - p\Phi(1)\Psi(1) + \sum_{g\in G}\frac{1}{n_g}u_{g^*}v_g p^2 \\ &= -p\Phi(1)\Psi(1) + \sum_{g\in G}\frac{1}{n_g}u_{g^*}v_g p^2, \end{aligned}$$

となり、よって

$$\Phi(1)\Psi(1) = \sum_{g\in G} \frac{1}{n_g} u_{g^*} v_g p$$

である。$\Phi(1)$, $\Psi(1)$, およびすべての n_g は p と素である。よって左辺は p と素であるが、右辺は p で割りきれて矛盾が生じる。 □

[2, Theorem II.4.3] は可換アソシエーションスキームに対して書かれているが、非可換でもそのまま成り立つ。したがって G の非自明な関係の valency はすべて等しい。このとき [1, Theorem 1.2] によって G は可換である。また $|X| = p$ とすれば Frame number

$$\mathcal{F}(G) = |X|^{|G|} \frac{\prod_{g\in G} n_g}{\prod_{\chi\in \mathrm{Irr}(G)} {m_\chi}^{\chi(1)^2}}$$

が p べきになることがすぐに分かる。

Theorem 2.2. $|X| = p$ が素数であるとき (X, G) は可換である。また Frame number $\mathcal{F}(G)$ は p べきである。

3 分解体

この節では $|X| = p$ を素数として (X, G) の最小分解体を考える。利用される代数体、特に判別式に関する内容は [6] などで確認できる古典的なものである。ここで分解体とは $\mathbb{Q}G$ の分解体を意味する。可換アソシエーションスキームの最小分解体は、$\mathbb{Q}$ にすべての既約指標の値 $\chi(\sigma_g)$ を添加して得られる。これを K と書く。K は有限次代数体であり $\mathbb{Q}$ のガロア拡大である。K の整数環を $\mathcal{O}_K$ と書く。また $|G| = d + 1$ とする。d は p と互いに素であることに注意しておく。

隣接代数 $\mathbb{Q}G$ は半単純なので、ある斜体上の全行列環の直和と同型である。しかし $\mathbb{Q}G$ は可換なので、斜体はすべて体であり、行列環はすべて 1 次である。すなわち $\mathbb{Q}G$ はいくつかの体の直和と同型である。その直和因子は $\mathrm{Irr}(G)$ 上のガロア群の軌道に対応する。Lemma 2.1 より、その軌道は二つであり、その一方は自明な表現のみからなる。よって $\mathbb{Q}G = \mathbb{Q} \oplus K'$ と書くことができる。このとき $\dim_{\mathbb{Q}} K' = d$ である。適当な写像によって $K' \subset \mathbb{C}$ と考えると、射影 $\mathbb{Q}G \to K'$ はある非自明な既約指標で与えられる。このことから K は K' を含む最小の Galois 拡大であることが分かる。

有理整数環 $\mathbb{Z}$ 上の隣接代数 $\mathbb{Z}G$ は上の直和分解において $\mathbb{Z} \oplus O_{K'}$ の部分 $\mathbb{Z}$-代数である。代数体の判別式を一般の有限階数 $\mathbb{Z}$-自由 $\mathbb{Z}$-代数に拡張して

考えると、$\mathbb{Z}G$ の判別式の絶対値 $|d(\mathbb{Z}G)|$ は Frame number $\mathcal{F}(G)$ に一致する [3]。また Theorem 2.2 より、それは p べきである。一方 $\mathbb{Z}$-代数 $\mathbb{Z}\oplus O_{K'}$ の判別式は K' の判別式 $d(K')$ に一致する。$|d(K')|$ は $|d(\mathbb{Z}G)|$ の約数になるので、やはり p べきである。K が K' を含む最小の Galois 拡大であることから $|d(K)|$ も p べきである。

ここで K が $\mathbb{Q}$ のアーベル拡大であることを仮定する。すると明らかに $K=K'$ である。

Kronecker-Weber の定理より K はある円分体に含まれる。$|d(K)|$ が p べきなので、p 以外の素数は K で分岐せず、K は $\mathbb{Q}(\zeta_{p^a})$ (ζ_{p^a} は 1 の原始 p^a-乗根) に含まれることが分かる。そのようなもので $\dim_{\mathbb{Q}} K=d$ であるものは唯一つであるから、最小分解体が決定される。

Theorem 3.1. (X,G) を $|X|=p,\ \ |G|=d+1$ であるアソシエーションスキームとする。更にその最小分解体 K が $\mathbb{Q}$ のアーベル拡大であることを仮定する。このとき K は $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ の部分体で $\dim_{\mathbb{Q}} K=d$ であるものとして一意的に決定される。

Remark 3.2. 最小分解体 K がアーベル拡大であることよりも弱く、K' がガロア拡大であること、すなわち $K=K'$ を仮定しても同様の結果が得られる。

4 指標表

この節では, 最小分解体 K が $\mathbb{Q}$ のアーベル拡大であることを仮定して (X,G) ($|X|=p$) の指標表を完全に決定する。これによって、それが Schurian スキームの指標表と一致することが分かる。素数位数の Schurian スキームは cyclotomic スキームと呼ばれるものしかないことが知られている。前の節と同じように K を (X,G) の最小分解体とし、その整数環を $\mathcal{O}_K$ とする。以下では常に K が $\mathbb{Q}$ のアーベル拡大であることを仮定する。$\alpha=\mathrm{Tr}_{\mathbb{Q}(\zeta_p)/K}(\zeta_p)$ とおく。また τ を $Gal(K/\mathbb{Q})$ の生成元とする。$\{\alpha^{\tau^i}\mid i=0,1,\cdots,d-1\}$ は $\mathcal{O}_K$ の整数基である。

Lemma 4.1. Cyclotomic スキーム $Cyc(p,d)$ の指標表は以下の通りである。

1	1	k	k	$\cdots$	k	1
φ	1	α	α^{τ}	$\cdots$	$\alpha^{\tau^{d-1}}$	k
φ^{τ}	1	α^{τ}	α^{τ^2}	$\cdots$	α	k
		$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$		
$\varphi^{\tau^{d-1}}$	1	$\alpha^{\tau^{d-1}}$	α	$\cdots$	$\alpha^{\tau^{d-2}}$	k

$Cyc(p,d)$ の指標表に第二直交関係 [2, Theorem II.3.5 (iii)] を用いて以下を得る。

Lemma 4.2. $\sum_{i=0}^{d-1}\alpha^{\tau^i}=-1$ であり、また

$$\sum_{i=0}^{d-1}\alpha^{\tau^i}\overline{\alpha}^{\tau^{i+j}}=\begin{cases}p-k & \text{if } j\equiv 0 \pmod d,\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

である。

これまでの議論から (X,G) の指標表は以下のようになる。

	1	g_1	g_2		g_d	
1_G	1	k	k	$\cdots$	k	1
χ	1	β_1	β_2	$\cdots$	β_d	k
χ^τ	1	β_1^τ	β_2^τ	$\cdots$	β_d^τ	k
		$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$		
$\chi^{\tau^{d-1}}$	1	$\beta_1^{\tau^{d-1}}$	$\beta_2^{\tau^{d-1}}$	$\cdots$	$\beta_d^{\tau^{d-1}}$	k

$\beta_j\in\mathcal{O}_K$ であり $\{\alpha^{\tau^i}\mid i=0,1,\cdots,d-1\}$ は $\mathcal{O}_K$ の整数基であるから、ある $b_s\in\mathbb{Z}$ があって $\beta_j=\sum_{s=0}^{d-1}b_s\alpha^{\tau^s}$ となる。g_j と 1 に第二直交関係を使うと

$$0=k\left(1+\sum_{i=0}^{d-1}\beta_j^{\tau^i}\right)=k\left(1+\sum_{i=0}^{d-1}\sum_{s=0}^{d-1}b_s\alpha^{\tau^{i+s}}\right)=k\left(1-\sum_{s=0}^{d-1}b_s\right)$$

となり $\sum_{s=0}^{d-1}b_s=1$ を得る。また g_j とそれ自身に第二直交関係を使うと

$$\begin{aligned}pk &= k\left(k+\sum_{i=0}^{d-1}\beta_j^{\tau^i}\overline{\beta_j}^{\tau^i}\right)=k\left(k+\sum_{i=0}^{d-1}\sum_{s=0}^{d-1}\sum_{t=0}^{d-1}b_sb_t\alpha^{\tau^{i+s}}\overline{\alpha}^{\tau^{i+t}}\right)\\ &= k\left(k+(p-k)\sum_{s=0}^{d-1}b_s^2\right)\end{aligned}$$

である。よって $\sum_{s=0}^{d-1}{b_s}^2=1$ を得る。以上より唯一つの b_s が 1 であり、それ以外は 0 である。すなわち、ある s があって $\beta_j=\alpha^{\tau^s}$ となる。

可換アソシエーションスキームの指標表の列は一次独立であるから、(X,G) の指標表の列はすべて異なり、したがって $Cyc(p,d)$ の指標表に一致する。

Theorem 4.3. (X,G) を $|X|=p$, $|G|=d+1$ であるアソシエーションスキームとし、その最小分解体が $\mathbb{Q}$ のアーベル拡大であると仮定する。このとき (X,G) の指標表は cyclotomic スキーム $Cyc(p,d)$ の指標表と同じである。

おわりに

この結果、特に一番重要な Lemma 2.1 は R. Brauer による群環の defect 1 の block に関する結果、およびその証明からヒントを得ている。より一般の場合にも類似の結果が得られてはいるが、仮定が強く、また分からないことも多く、まだまだ不十分である。

また証明の不備を指摘してくれた Hanguk Kang 氏 (Pusan National Univ.) に感謝する。

References

[1] Z. Arad, E. Fisman, and M. Muzychuk, *Generalized table algebras*, Israel J. Math. **114** (1999), 29–60.

[2] E. Bannai and T. Ito, *Algebraic combinatorics I : Association schemes*, Benjamin-Cummings, Menlo Park CA, 1984.

[3] A. Hanaki, *Semisimplicity of adjacency algebras of association schemes*, J. Alg. **225** (2000), 124–129.

[4] A. Hanaki, *Locality of a modular adjacency algebra of an association scheme of prime power order*, Arch. Math. **79** (2002), 167–170.

[5] A. Hanaki and K. Uno, *Algebraic structure of association schemes of prime order*, preprint.

[6] 高木貞治, 代数的整数論 (第 2 版), 岩波書店, 1971.

[7] P.-H. Zieschang, *An algebraic approach to association schemes*, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1996, (LNM 1628).